École Nationale d'Ingénieurs de Tarbes

Année 2018-2019 Enseignements Semestre 3

SECOND PRINCIPE
Exercice 14 - Proposition de correction

Intervenants

Karl DELBÉ Karl.Delbe@enit.fr
Jean DENAPE Jean.Denape@enit.fr
Jean-Yves PARIS Jean-Yves.Paris@enit.fr
Xavier DARAIGNEZ Xavier.Daraignez@enit.fr

Cycle de gaz parfait

Deux moles d'un gaz parfait subissent la succession de transformations suivante : ($\mathbf{R} = 8,31$ $\mathbf{J.mol^{-1}.K^{-1}}$, $\mathbf{C_{m,P} = 29,1}$ $\mathbf{J.mol^{-1}.K^{-1}}$, $\mathbf{C_{m,V} = 20,8}$ $\mathbf{J.mol^{-1}.K^{-1}}$, $\gamma = 1,4$) :

- **une compression adiabatique réversible AB, de pression $\mathbf{P_A = 1}$ bar jusqu'à $\mathbf{P_B = 4}$ bars. Au terme de la compression la température atteinte est $\theta_\mathbf{B} = \mathbf{200}$ °C ;**
- **une détente isotherme BC ;**
- **Un refroidissement isobare CA pour revenir à l'état initial.**

Dans les deux parties qui suivent, on se propose d'abord d'étudier le cycle d'un point de vue énergétique, puis de l'analyser d'un point de vue entropique pour déterminer s'il peut être réalisé.

- système : {gaz}(système fermé) - $n = 2$ *moles*

- modèle : {Gaz parfait - équation d'état : $PV = nRT$}

État A	$\xrightarrow[adiab.rev.]{compression}$	État B	$\xrightarrow[isotherme]{détente}$	État C
$P_A = 1$ *bar*		$P_B = 4$ *bars*		$P_C = P_A = 1$ *bar*
$\theta_A = ?$		$\theta_B = 200$ °C		$\theta_C = \theta_B$
		$= 473$ K		$= 473$ K
État A		$\xleftarrow[isobare]{refroidissement}$		État C

1. **Étude énergétique du cycle.**

   a) **Calculez la température $\mathbf{T_A}$, puis représentez ce cycle dans un diagramme $\mathbf{P(V)}$. S'agit-il d'un cycle moteur ou récepteur ?**

   la transformation **AB** est adiabatique réversible (isentropique). La relation de Laplace peut donc être utilisée pour déterminer la température, en effet, sachant que :

$$\begin{aligned} PV^\gamma = cste \quad &\text{et que} \quad PV = nRT \\ \text{alors } V = \frac{nRT}{P} \quad &\text{et donc} \quad P\left(\frac{nRT}{P}\right)^\gamma \\ \text{par conséquent} \quad & \qquad P^{1-\gamma}T^\gamma = cste \end{aligned}$$

On déduit alors la température de l'état A telle que :

$$\begin{aligned} P_A^{1-\gamma}\, T_A^{\gamma} &= P_B^{1-\gamma}\, T_B^{\gamma} \\ \Rightarrow \qquad & \boxed{T_A = T_B \left(\frac{P_B}{P_A}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}} \end{aligned}$$

Application numérique :

$$T_A = 473 \left(\frac{4 \cdot 10^5}{1 \cdot 10^5}\right)^{\frac{1-1,4}{1,4}} = \boxed{318\ K}$$

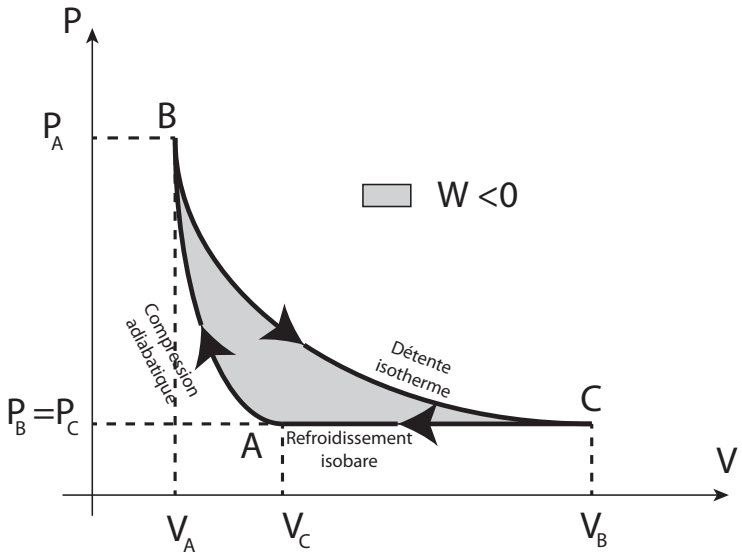


Figure 1: Diagramme de Clapeyron

Le cycle est parcouru dans le sens horaire (des aiguilles d'une montre), il est donc moteur.

$$W_{cycle} > 0$$

b) Calculez les quantités de chaleur et de travail échangées respectivement au cours des trois transformations mises en jeu durant ce cycle.

- Transformation AB : compression adiabatique réversible.
  Comme la transformation est adiabatique réversible alors :

$$\boxed{Q_{AB} = 0}$$

le travail au cours de cette transformation est calculé à partir de la définition :

$$W_{AB} = -\int_{V_A}^{V_B} P\,dV = -P\,V^{\gamma}\int_{V_A}^{V_B} V^{-\gamma}\,dV$$

sachant que

$$P\,V^{\gamma} = P_A\,V_A^{\gamma} = P_B\,V_B^{\gamma}$$

alors

$$W_{AB} = -\frac{P\,V^{\gamma}}{1-\gamma}\left[V^{1-\gamma}\right]_{V_A}^{V_B} = \frac{P_B\,V_B - P_A\,V_A}{\gamma - 1} = \frac{n\,R\,(T_B - T_A)}{\gamma - 1}$$

Application numérique :

$$W_{AB} \;=\; \frac{2\cdot 8,31\,(473-318,3)}{1,4-1} = \boxed{6\ 435,5\ J}$$

Autre méthode :

$$\Delta U_{AB} = W_{AB} + Q_{AB} = W_{AB} \text{ car } Q_{AB} = 0$$

Sachant que

$$\Delta U_{AB} = W_{AB} = n\,C_{m,V}(T_B - T_A)$$

puisque l'énergie interne est une fonction d'état, sa valeur peut être déduite à partir d'une transformation supposée du gaz de type isochore.

Application numérique :

$$W_{AB} \;=\; 2\cdot 20,8\,(473-318,3) = \boxed{6\ 435,5\ J}$$

- Transformation BC : détente isotherme

Pour un gaz parfait, la variation de l'énergie interne est nulle dans le cas d'un détente isotherme, :

$$\Delta U_{BC} = 0$$

D'après le Premier Principe de la thermodynamique :

$$\Delta U_{BC} = W_{BC} + Q_{BC}$$

Par conséquent :

$$W_{BC} = -Q_{BC}$$

On détermine le travail W_{BC}, par définition :

$$W_{BC} = -\int_{V_B}^{V_C} P\,dV = -P\,V\int_{V_B}^{V_C}\frac{dV}{V}$$

Car dans le cas d'un transformation isotherme d'un gaz parfait :

$$P\,V = n\,R\,T = cste$$

Ainsi :

$$W_{BC} = -P_B\,V_B\,\ln\left(\frac{V_C}{V_B}\right) = \boxed{-n\,R\,T_B\,\ln\left(\frac{P_B}{P_C}\right)}$$

Puisque la transformation est isotherme :

$$P_B\,V_B = P_C\,V_C \Rightarrow \frac{V_C}{V_B} = \frac{P_B}{P_C}$$

Application numérique :

$$W_{BC} \;=\; -2\cdot 8,31\cdot 473\,\ln\left(\frac{4\cdot 10^5}{1\cdot 10^5}\right) = \boxed{-10\ 898\ J}$$

et

$$Q_{BC} \;=\; \boxed{10\ 898\ J}$$

- Transformation CA : refroidissement isobare

  Par définition, la quantité de chaleur échangée au cours d'une transformation isobare est telle que :

$$Q_{CA} = -\int_{T_C}^{T_A} n\,C_{m,P}\,dT = n\,C_{m,P}(T_A - T_C)$$

  Application numérique :

$$Q_{CA} \;=\; 2\cdot 29,1(318-473) = \boxed{-9\ 003,5\ J}$$

  Par définition, le travail échangé durant la transformation BC vaut :

$$W_{CA} = -\int_{V_C}^{V_A} P\,dV = -P_C(V_A - V_C) = -n\,R\,(T_A - T_C)$$

  Application numérique :

$$W_{CA} \;=\; -2\cdot 8,31(318-473) = \boxed{2\ 571,1\ J}$$

c) Déterminez la quantité de travail échangée au cours du cycle et précisez si cette quantité est globalement reçue ou fournie par le gaz.

$$W_{Cycle} = W_{AB} + W_{BC} + W_{CA}$$

Application numérique :

$$W_{Cycle} = 6\ 435,5 - 10\ 898 + 2\ 571,1 = \boxed{-1\ 891,4\ J}$$

Au cours du cycle, le système fournit globalement du travail au milieu extérieur.

2. **Étude entropique du cycle.**
Au cours du cycle les échanges thermiques (quantités de chaleur) ont lieu entre le système et une seule source de chaleur consistant en un thermostat à la température $\theta_0 = 200$ °C.

a) Déterminez, en le justifiant, la variation d'entropie du gaz entre A et B. La transformation AB est adiabatique :

$$S_{ech,CA} = 0\ J \cdot K{-}1$$

et réversible :

$$S_{p,CA} = 0\ J \cdot K^{-1}$$

. Ainsi

$$\boxed{\Delta S_{CA} = 0\ J \cdot K^{-1}}$$

On dit également de ces transformations qu'elles sont isentropiques.

b) Calculez la variation d'entropie du gaz au cours de la transformation isotherme BC, puis son entropie d'échange. Montrez que cette transformation BC est réversible.

D'après le Second Principe de la Thermodynamique :

$$\Delta S_{BC} = S_{e,BC} + S_{p,BC}$$

- Par définition, ΔS_{BC} est égale à :

$$\Delta S_{BC} = \int_{rev} \frac{\delta Q_{BC}}{T}$$

comme la transformation BC est isotherme alors dans ce cas $T = T_B$, et donc :

$$\Delta S_{BC} = \frac{Q_{BC}}{T_B}$$

Application numérique :

$$\Delta S_{AB--BC} = \frac{10\ 898}{473} = \boxed{23\ J \cdot K^{-1}}$$

- L'entropie d'échange au cours de la transformation BC est telle que :

$$S_{e,BC} = -\Delta S_{ext,BC} = -\int_{rev} \frac{\delta Q_{ext,BC}}{T_{Source}} = -\int_{rev} \frac{-\delta Q_{BC}}{T_{Source}} = \frac{Q_{BC}}{T_{Source}}$$

car

$$Q_{ext,BC} = -Q_{BC}$$

Application numérique :

$$S_{ech,BC} = \frac{10\ 898}{473} = \boxed{23\ J \cdot K^{-1}}$$

- D'où l'entropie créée au cours de la transformation BC :

$$S_{p,BC} = \Delta S_{BC} - S_{e,BC}$$

Application numérique :

$$S_{p,BC} = 23 - 23 = \boxed{0\ J \cdot K^{-1}}$$

La transformation BC est donc réversible.

c) De même, calculez la variation d'entropie du gaz et l'entropie d'échange au cours du refroidissement isobare CA. En déduire l'entropie créée entre C et A.

Par analogie à la partie précédente :

$$\Delta S_{CA} = S_{e,CA} + S_{p,CA}$$

- ΔS_{CA} équivaut à :

$$\Delta S_{CA} = \int_{rev} \frac{\delta Q_{CA}}{T} = \int_{T_C}^{T_A} \frac{n\, C_{m,P}\, dT}{T} = n\, C_{m,P}\, \ln\left(\frac{T_A}{T_C}\right)$$

Application numérique :

$$\Delta S_{CA} = 2 \cdot 29,1 \cdot \ln\left(\frac{318,3}{473}\right) = \boxed{-23\ J \cdot K^{-1}}$$

- L'entropie d'échange de la transformation CA s'écrit :

$$S_{e,CA} = -\Delta S_{ext,CA} = -\int_{rev} \frac{\delta Q_{ext,CA}}{T_{Source}} = -\int_{rev} \frac{-\delta Q_{CA}}{T_{Source}} = \frac{Q_{BC}}{T_{Source}}$$

étant donné que

$$Q_{ext,CA} = -Q_{CA}$$

Application numérique :

$$S_{ech,CA} = \frac{-9\ 003,5}{473} = \boxed{-19\ J \cdot K^{-1}}$$

- Et donc l'entropie créée au cours de la transformation CA est :

$$S_{p,CA} = \Delta S_{CA} - S_{e,CA}$$

Application numérique :

$$S_{p,CA} = -23 - (-19) = \boxed{-4\ J \cdot K^{-1}}$$

La transformation CA est **impossible** spontanément.

d) En déduire l'entropie créée au cours du cycle ABCA. Le cycle proposé est-il réalisable ? L'entropie créée au cours du cycle est a somme des entropies produites à chaque transformation :

$$S_{p,cycle} = S_{p,AB} + S_{p,BC} + S_{p,CA}$$

Application numérique :

$$S_{p,cycle} = \boxed{-4\ J \cdot K^{-1}}$$

Le cycle n'est pas réalisable. Ce résultat est cohérent avec celui présenté en cours qui démontre qu'**une machine thermique en contact avec une seule source de chaleur ne peut pas être motrice**.